# Le rang des applications antisymétriques

par Pierre Lecomte (articles mathématiques)

Date de publication : 30/01/2010

Dernière mise à jour :

On sait qu'une matrice antisymétrique réelle non singulière est de dimension paire. Ce fait admet une étonnante généralisation, qui m'a été inspirée par une question d'un internaute sur un forum de mathématique.

# I - Le rang des applications antisymétriques

Soit un espace vectoriel $E$ de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ et muni d'une forme bilinéaire non dégénérée $g$. Si la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de deux, alors les images des endomorphismes antisymétriques de $(E,g)$ sont de dimension paire.

Pour rappel, $A$ est antisymétrique si la forme bilinéaire $(x,y) \mapsto g(Ax,y)$ est antisymétrique.

En caractéristique deux, on peut trouver des applications antisymétriques de rang impair.

# II - Première preuve

Soit $f$ la forme bilinéaire antisymétrique $f(x,y) = g(Ax,y)$. Le rang de $f$ est égal au rang de $A$. De plus, il est bien connu et facile de montrer par récurrence qu'il existe une base dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale par blocs, chaque bloc étant nul ou bien égal à $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

# III - Seconde preuve

Il n'y a pas besoin de se soucier de l'isotropie pour la forme $g$. Soient $h$ et $k$ les applications de $E$ dans $E*$ définies par $h(x) = f(x,.)$ et $k(x) = g(x,.)$.

Par définition, le rang de $f$ est égal à celui de $h$. Or, $h = koA$ et $k$ est un isomorphisme, donc le rang de $f$ est égal à celui de $A$. Maintenant, on oublie complètement $g$ et on doit montrer que le rang $r$ de $f$ est pair.

Le rang de $f$ est égal au rang de la matrice $C = [f(e_i, e_j)]$ pour toute base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ $E$ de (en effet, $C$ est la matrice de $h$ dans les bases $B$ et $B*$, où $B*$ désigne la base duale de $B$).

Quitte à remplacer $E$ par un supplémentaire du noyau $N$ de $h$, on peut supposer que $N = 0$, donc $f$ est non dégénérée, ce qui entraîne que $det(C)$ est non nul. Or, $C$ est antisymétrique donc $det(C) = det(-C) = (-1)^r det(C)$, ce qui montre que $r$ est pair.