À propos de l'équation du second degré complexe

par Pierre Lecomte (articles mathématiques)

Date de publication : 23/06/2011

Dernière mise à jour :

Dans ce billet, nous allons nous intéresser à l'angle non orienté que font les racines d'une équation du second degré.

I - Le problème

Dans ce billet, nous allons nous intéresser à l'angle non orienté θ (1) que font les racines z_1 et z_2 d'une équation du second degré $z^2 + pz + q = 0$, dans laquelle p et q sont des nombres complexes.

Nous supposerons que le produit q de ces racines n'est pas nul, afin qu'aucune d'elles ne le soit.

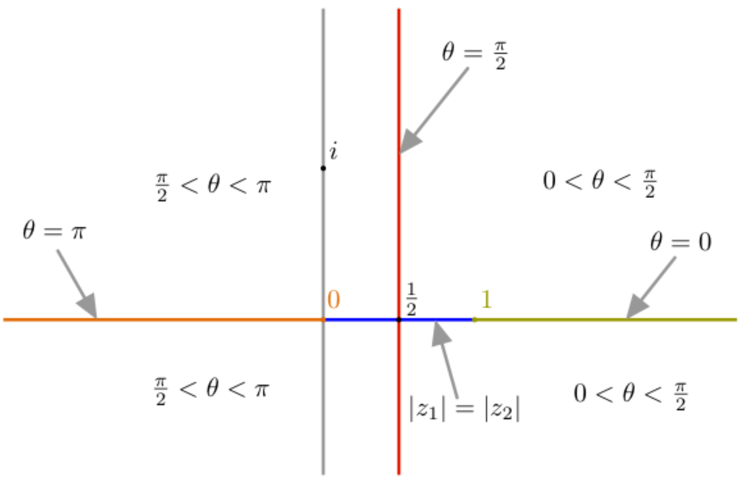
Il est amusant de noter que c'est le « pendant multiplicatif » □ on *divise* p^2 par $4q$ plutôt que de *soustraire* le second du premier :

$$\lambda = \frac{p^2}{4q} \qquad (1)$$

du discriminant $\varrho = p^2 - 4q$ de l'équation qui va tenir le rôle principal. C'est en effet sa position dans le plan complexe qui détermine les propriétés de θ.

II - Résumé de la situation

Le dessin suivant résume la situation :



On y voit ainsi que les racines de l'équation sont orthogonales le long de la médiatrice du segment $[0,1]$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{R}i$.

« À droite » de cette médiatrice, les racines forment un angle aigu qui est nul si et seulement si $\lambda \in [1, +\infty[$.

« À gauche », l'angle est obtus et plat si et seulement si $\lambda \in]-\infty, 0]$.

Le segment $[0,1]$ est un peu particulier. Comme j'avais proposé de le démontrer dans cet exercice, il correspond aux cas où les racines sont de même longueur. Leur angle y varie de 2 à π en accord avec ce que nous venons de décrire. Par exemple, il est nul lorsque $\lambda = 1$, droit lorsque $\lambda = \frac{1}{2}$ et plat si λ est nul.

Dans ce dernier cas, p est nul et les racines sont opposées, formant effectivement un angle plat. Ce cas pris en considération, nous supposerons désormais p et donc λ non nuls. Cela nous simplifiera un peu la vie pour établir ces propriétés.

Voyons comment faire.

III - Discussion

Puisque $\lambda \neq 0$, il résulte de (1) que

$$\varrho = p^2\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Donc μ, étant une racine carrée de $1-\frac{1}{\lambda}$, les racines de l'équation sont $\frac{p(-1\pm\mu)}{2}$ et (2)

$$\cos\theta = \frac{z_1\cdot z_2}{|z_1||z_2|} = \frac{|p^2|(1-|\mu|^2)}{|p|^2|1-\mu^2|} = |\lambda|-|\lambda-1|$$

Le membre de droite de cette égalité est la différence entre les distances de λ à 0 et à 1. Les conclusions relatives aux valeurs de θ sont alors faciles à tirer.

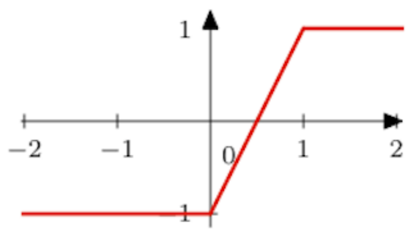
Par exemple, $cos\theta$ est nul, donc (3) θ est droit si et seulement si λ est sur la médiatrice du segment $[0,1]$.

Par ailleurs, $\cos\theta>0$ si et seulement si $|\lambda|>|\lambda-1|$, ce qui signifie que λ est « à droite » de cette médiatrice, etc.

Le cas des valeurs de λ situées sur le segment $[0,1]$ est discuté dans l'exercice mentionné ci-dessus.

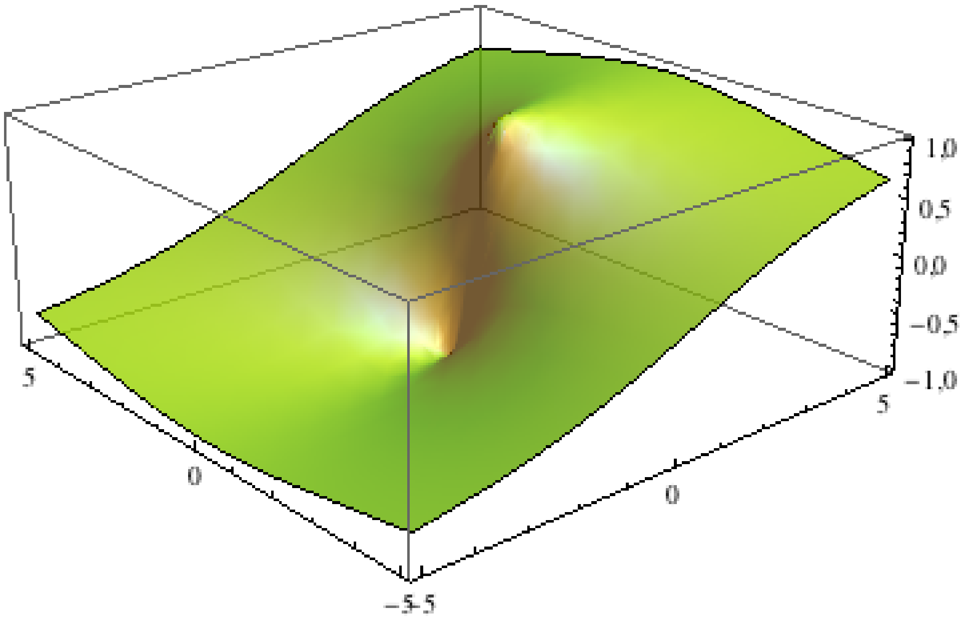
IV - Ajout

Il est intéressant d'observer une vue du graphe de la fonction $|\lambda|-|\lambda-1|$.



Sa restriction à l'axe réel.

Sa restriction à l'axe réel corrobore bien ce que nous avons dit plus haut. Voici ensuite le graphe limité à un carré du plan complexe :



Les deux singularités correspondent aux valeurs 0 et 1 de -1. On y perçoit relativement bien le profil particulier de la restriction à l'axe réel.

En ajoutant les représentations des plans horizontaux de cotes -1, 0 et 1, on visualise les différentes régions où l'angle θ est obtus ou aigu. Les plans extrêmes sont tangents à la surface en les demi-droites le long desquelles l'angle est plat ou nul.

On constate que le plan médian coupe la surface selon une droite. Cela s'explique aisément : cette droite est la partie du graphe correspondant aux $\lambda \in \frac{1}{2} + \mathbb{R}i$. Pour ceux-ci, λ et $1-\lambda$ sont conjugués et ont donc même module : λ est sur la médiatrice de $[0, 1]$.

Plus généralement, les lignes de niveau de la surface, c'est-à-dire le lieu des points en lequel 0 a une valeur donnée, sont des branches d'hyperboles dont les foyers sont aux points 0 et 1. Les cas particuliers sur lesquels on a insisté dans le billet sont ceux pour lesquels la constante en question est -1, 0 ou 1.

1 : Pour les notions géométriques, nous identifions

$$\mathbb{C}$$

à

$$\mathbb{R}^2$$

muni de ses produit scalaire et orientation standards. Pour ceux-ci, le couple de nombre complexes

$$(1, i)$$

est une base orthonormée directe. Nous noterons

$$u \cdot v$$

le produit scalaire des nombres complexes

$$u$$

et

$$v$$

. Il s'exprime facilement à l'aide des opérations sur les nombres complexes. Pour rappel,

$$u \cdot v = \frac{1}{2}(u\bar{v} + \bar{u}v)$$

.
2 : Une variante de cette formule est exposée dans mon petit livre *Le mathématicien et ses esclaves* dont je me suis inspiré pour écrire ce billet.
3 : Par définition,

$$\theta$$

.